

CSCA 数学 · 样卷

48 题 · 60 分钟 · 单项选择,四个选项中只有一个正确 · 卷末附答案速查与逐题解析

© 2026 CSCA Start(cscastart.com)。原创练习材料,按真实 CSCA 数学卷的题型、考点配比与难度编写。可自由用于个人学习与分享。
与官方考试机构无关联。更多免费练习:cscastart.com/practice

1. 下列函数中,其定义域和值域分别与函数 $y = 10^{\lg x}$ 的定义域和值域相同的是

- A. $y = x$
- B. $y = \lg x$
- C. $y = 2^x$
- D. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

2. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, |x+1| > 1$; 命题 $q: \exists x > 0, x^3 = x$, 则

- A. p 和 q 都是真命题
- B. $\neg p$ 和 q 都是真命题
- C. p 和 $\neg q$ 都是真命题
- D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

3. 已知函数 $f(x) = e^{-(x-1)^2}$. 记 $a = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), b = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), c = f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, 则

- A. $b > c > a$
- B. $b > a > c$
- C. $c > b > a$
- D. $c > a > b$

4. 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数,且在 $(0, +\infty)$ 单调递减,则

- A. $f\left(\log_5 \frac{1}{4}\right) > f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) > f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)$
- B. $f\left(\log_8 \frac{1}{4}\right) > f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) > f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)$
- C. $f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right) > f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) > f\left(\log_5 \frac{1}{4}\right)$
- D. $f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) > f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right) > f\left(\log_5 \frac{1}{4}\right)$

5. 设函数 $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, 则下列结论错误的是

- A. $f(x)$ 的一个周期为 -2π
- B. $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{8\pi}{3}$ 对称
- C. $f(x + \pi)$ 的一个零点为 $x = \frac{\pi}{6}$
- D. $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 单调递减

6. 设 $a = \log_3 2, b = \log_5 3, c = \frac{2}{3}$, 则

- A. $a < c < b$
- B. $a < b < c$
- C. $b < c < a$
- D. $c < a < b$

7. 若 $a > b > 0, 0 < c < 1$, 则

- A. $\log_a c < \log_b c$
- B. $\log_c a < \log_c b$
- C. $a^c < b^c$
- D. $c^a > c^b$

8. 已知 $a = \log_2 0.2, b = 2^{0.2}, c = 0.2^{0.3}$, 则

- A. $a < b < c$
- B. $a < c < b$
- C. $c < a < b$
- D. $b < c < a$

9. 设函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 则下列函数中为奇函数的是

- A. $f(x-1) - 1$
- B. $f(x-1) + 1$
- C. $f(x+1) - 1$
- D. $f(x+1) + 1$

10. 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, 点 A 在 C 上, 点 $B(3, 0)$, 若 $|AF| = |BF|$, 则 $|AB| =$

- A. 2
- B. $2\sqrt{2}$
- C. 3
- D. $3\sqrt{2}$

11. 中心在原点, 焦点在 x 轴上的双曲线的一条渐近线经过点 $(4, 2)$, 则它的离心率为

- A. $\sqrt{6}$
- B. $\sqrt{5}$
- C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$
- D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

12. 设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1), C_2: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的离心率分别为 e_1, e_2 . 若 $e_2 = \sqrt{3}e_1$, 则 $a =$

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- B. $\sqrt{2}$
- C. $\sqrt{3}$
- D. $\sqrt{6}$

13. 已知 A 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点, 点 A 到 C 的焦点的距离为 12, 到 y 轴的距离为 9, 则 $p =$

- A. 2
- B. 3
- C. 6
- D. 9

14. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1 + a_2 + a_3 = 1, a_2 + a_3 + a_4 = 2$, 则 $a_6 + a_7 + a_8 =$

- A. 12
- B. 24
- C. 30
- D. 32

15. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_5 = S_{10}, a_5 = 1$, 则 $a_1 =$
- A. $\frac{7}{2}$
B. $\frac{7}{3}$
C. $-\frac{1}{3}$
D. $-\frac{7}{11}$
16. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_4 + a_5 = 24, S_6 = 48$, 则 $\{a_n\}$ 的公差为
- A. 1
B. 2
C. 4
D. 8
17. 设集合 $A = \{x \mid x^2 - 4 \leq 0\}, B = \{x \mid 2x + a \leq 0\}$, 且 $A \cap B = \{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$, 则 $a =$
- A. -4
B. -2
C. 2
D. 4
18. 若 $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin 2\alpha =$
- A. $\frac{7}{25}$
B. $\frac{1}{5}$
C. $-\frac{1}{5}$
D. $-\frac{7}{25}$
19. 已知函数 $f(x) = 2\cos^2 x - \sin^2 x + 2$, 则
- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π , 最大值为 3
B. $f(x)$ 的最小正周期为 π , 最大值为 4
C. $f(x)$ 的最小正周期为 2π , 最大值为 3
D. $f(x)$ 的最小正周期为 2π , 最大值为 4
20. 设 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) =$
- A. $e^{-x} - 1$
B. $e^{-x} + 1$
C. $-e^{-x} - 1$
D. $-e^{-x} + 1$
21. 生物实验室有 5 只兔子, 其中只有 3 只测量过某项指标, 若从这 5 只兔子中随机取出 3 只, 则恰有 2 只测量过该指标的概率为
- A. $\frac{2}{3}$
B. $\frac{3}{5}$
C. $\frac{2}{5}$
D. $\frac{1}{5}$
22. 已知集合 $A = \{-2, 0, 2\}, B = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\}$, 则 $A \cap B =$
- A. $\emptyset$
B. $\{2\}$
C. $\{0\}$
D. $\{-2\}$

23. 已知 $z = 1 - 2i$, 且 $z + a\bar{z} + b = 0$, 其中 a, b 为实数, 则

- A. $a = 1, b = -2$
- B. $a = -1, b = 2$
- C. $a = 1, b = 2$
- D. $a = -1, b = -2$

24. 设 F_1, F_2 是双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的两个焦点, O 为坐标原点, 点 P 在 C 上且 $|OP| = 2$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为

- A. $\frac{7}{2}$
- B. 3
- C. $\frac{5}{2}$
- D. 2

25. 直线 l 经过椭圆的一个顶点和一个焦点, 若椭圆中心到 l 的距离为其短轴长的 $\frac{1}{4}$, 则该椭圆的离心率为

- A. $\frac{1}{3}$
- B. $\frac{1}{2}$
- C. $\frac{2}{3}$
- D. $\frac{3}{4}$

26. 点 $(0, -1)$ 到直线 $y = k(x + 1)$ 距离的最大值为

- A. 1
- B. $\sqrt{2}$
- C. $\sqrt{3}$
- D. 2

27. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\sqrt{5}$. P 是 C 上一点, 且 $F_1P \perp F_2P$. 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 4, 则 $a =$

- A. 1
- B. 2
- C. 4
- D. 8

28. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , P 是 C 上的点 $PF_2 \perp F_1F_2$, $\angle PF_1F_2 = 30^\circ$, 则 C 的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$
- B. $\frac{1}{3}$
- C. $\frac{1}{2}$
- D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

29. 已知方程 $\frac{x^2}{m^2+n} - \frac{y^2}{3m^2-n} = 1$ 表示双曲线, 且该双曲线两焦点间的距离为 4, 则 n 的取值范围是

- A. $(-1, 3)$
- B. $(-1, \sqrt{3})$
- C. $(0, 3)$
- D. $(0, \sqrt{3})$

30. 钝角三角形 ABC 的面积是 $\frac{1}{2}$, $AB = 1, BC = \sqrt{2}$, 则 $AC =$

- A. 5
- B. $\sqrt{5}$
- C. 2
- D. 1

31. 在 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{4}$, BC 边上的高等于 $\frac{1}{3}BC$, 则 $\sin A =$

- A. $\frac{3}{10}$
- B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$
- C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

32. 将函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 的图像向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到曲线 C , 若 C 关于 y 轴对称, 则 ω 的最小值是

- A. $\frac{1}{6}$
- B. $\frac{1}{4}$
- C. $\frac{1}{3}$
- D. $\frac{1}{2}$

33. 函数 $f(x) = \frac{1}{5} \sin(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{6})$ 的最大值为

- A. $\frac{6}{5}$
- B. 1
- C. $\frac{3}{5}$
- D. $\frac{1}{5}$

34. (2023. 全国乙卷) 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$ 单调递增, 直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 和 $x = \frac{2\pi}{3}$ 为函数 $y = f(x)$ 的图像的两条对称轴, 则 $f(-\frac{5\pi}{12}) =$

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- B. $-\frac{1}{2}$
- C. $\frac{1}{2}$
- D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

35. 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和为 15, 且 $a_5 = 3a_3 + 4a_1$, 则 $a_3 =$

- A. 16
- B. 8
- C. 4
- D. 2

36. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_2 = 4, S_4 = 6$, 则 $S_6 =$

- A. 7
- B. 8
- C. 9
- D. 10

37. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $b = 2, B = \frac{\pi}{6}, C = \frac{\pi}{4}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为

- A. $2\sqrt{3} + 2$
- B. $\sqrt{3} + 1$
- C. $2\sqrt{3} - 2$
- D. $\sqrt{3} - 1$

38. 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1, F_1, F_2$ 为两个焦点, O 为原点, P 为椭圆上一点, $\cos \angle F_1 P F_2 = \frac{3}{5}$, 则 $|PO| =$

- A. $\frac{2}{5}$
- B. $\frac{\sqrt{30}}{2}$
- C. $\frac{3}{5}$
- D. $\frac{\sqrt{35}}{2}$

39. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线方程为 $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$, 且与椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 有公共焦点, 则 C 的方程为

- A. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{10} = 1$
- B. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$
- C. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$
- D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

40. 若过点 $(2, 1)$ 的圆与两坐标轴都相切, 则圆心到直线 $2x - y - 3 = 0$ 的距离为

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$
- D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

41. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_4 = 0, a_5 = 5$, 则

- A. $a_n = 2n - 5$
- B. $a_n = 3n - 10$
- C. $S_n = 2n^2 - 8n$
- D. $S_n = \frac{1}{2}n^2 - 2n$

42. 已知 α 为锐角, $\cos \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, 则 $\sin \frac{\alpha}{2} =$

- A. $\frac{3-\sqrt{5}}{8} \rightarrow$
- B. $\frac{-1+\sqrt{5}}{8} \rightarrow$
- C. $\frac{3-\sqrt{5}}{4} \rightarrow$
- D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

43. 等轴双曲线 C 的中心在原点, 焦点在 x 轴上, C 与抛物线 $y^2 = 16x$ 的准线交于点 A 和点 $B, |AB| = 4\sqrt{3}$, 则 C 的实轴长为

- A. $\sqrt{2}$
- B. $2\sqrt{2}$
- C. 4
- D. 8

44. 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, E 为 AD 的中点, 则 $\overrightarrow{EB} =$

- A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$
- B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
- C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$
- D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

45. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $3S_3 = S_2 + S_4, a_1 = 2$, 则 $a_5 =$

- A. -12
- B. -10
- C. 10
- D. 12

46. 若 $f(x) = (x+a) \ln \frac{2x-1}{2x+1}$ 为偶函数, 则 $a =$

- A. -1
- B. 0
- C. $\frac{1}{2}$
- D. 1

47. 下列函数中最小值为 4 的是

- A. $y = x^2 + 2x + 4$
- B. $y = |\sin x| + \frac{4}{|\sin x|}$
- C. $y = 2^x + 2^{2-x}$
- D. $y = \ln x + \frac{4}{\ln x}$

48. 设函数 $f(x) = 2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 则 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, -2]$
- B. $[-2, 0)$
- C. $(0, 2]$
- D. $[2, +\infty)$

答案速查

1 D	2 B	3 A	4 C	5 D	6 A	7 B	8 B
9 B	10 B	11 D	12 A	13 C	14 D	15 B	16 C
17 B	18 D	19 B	20 D	21 B	22 B	23 A	24 B
25 B	26 B	27 A	28 D	29 A	30 B	31 D	32 C
33 A	34 D	35 C	36 A	37 B	38 B	39 B	40 B
41 A	42 D	43 C	44 A	45 B	46 B	47 C	48 D

逐题解析

1. D 解：函数 $y = 10^{\lg x}$ 的定义域和值域均为 $(0, +\infty)$ ，函数 $y = x$ 的定义域和值域均为 R ，不满足要求；函数 $y = \lg x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，值域为 R ，不满足要求；函数 $y = 2^x$ 的定义域为 R ，值域为 $(0, +\infty)$ ，不满足要求；函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域和值域均为 $(0, +\infty)$ ，满足要求；故选：D.

2. B 【详解】对于 p 而言，取 $x = -1$ ，则有 $|x + 1| = 0 < 1$ ，故 p 是假命题， $\neg p$ 是真命题，对于 q 而言，取 $x = 1$ ，则有 $x^3 = 1^3 = 1 = x$ ，故 q 是真命题， $\neg q$ 是假命题，综上， $\neg p$ 和 q 都是真命题。故选：B.

3. A 【详解】令 $g(x) = -(x-1)^2$ ，则 $g(x)$ 开口向下，对称轴为 $x = 1$ ，因为 $\frac{\sqrt{6}}{2} - 1 - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{2} - \frac{4}{2}$ ，而 $(\sqrt{6} + \sqrt{3})^2 - 4^2 = 9 + 6\sqrt{2} - 16 = 6\sqrt{2} - 7 > 0$ ，所以 $\frac{\sqrt{6}}{2} - 1 - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{2} - \frac{4}{2} > 0$ ，即 $\frac{\sqrt{6}}{2} - 1 > 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 由二次函数性质知 $g\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) < g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，因为 $\frac{\sqrt{6}}{2} - 1 - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} - \frac{4}{2}$ ，而 $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - 4^2 = 8 + 4\sqrt{3} - 16 = 4\sqrt{3} - 8 = 4(\sqrt{3} - 2) < 0$ ，即 $\frac{\sqrt{6}}{2} - 1 < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，所以 $g\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) > g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ，综上， $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < g\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) < g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，又 $y = e^x$ 为增函数，故 $a < c < b$ ，即 $b > c > a$ 。故选：A.

4. C 【详解】 $\because f(x)$ 是 R 的偶函数， $\therefore f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right) = f(\log_3 4)$ ， $\because \log_3 4 > 1 = 2^0 > 2^{-\frac{3}{2}}$ ，又 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减， $f(\log_3 4) < f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right) < f\left(2^{-\frac{3}{4}}\right)$ ， $\therefore f\left(2^{-\frac{3}{4}}\right) > f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right) > f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right)$ ，故选 C.

5. D 解：A. 函数的周期为 $2k\pi$ ，当 $k = -1$ 时，周期 $T = -2\pi$ ，故 A 正确，B. 当 $x = \frac{8\pi}{3}$ 时， $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{9\pi}{3} = \cos 3\pi = -1$ 为最小值，此时 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{8\pi}{3}$ 对称，故 B 正确，C 当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时， $f\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$ ，则 $f(x + \pi)$ 的一个零点为 $x = \frac{\pi}{6}$ ，故 C 正确，D. 当 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 时， $\frac{5\pi}{6} < x + \frac{\pi}{3} < \frac{4\pi}{3}$ ，此时函数 $f(x)$ 不是单调函数，故 D 错误，故选：D.

6. A 【详解】因为 $a = \frac{1}{3} \log_3 2^3 < \frac{1}{3} \log_3 9 = \frac{2}{3} = c$ ， $b = \frac{1}{3} \log_5 3^3 > \frac{1}{3} \log_5 25 = \frac{2}{3} = c$ ，所以 $a < c < b$ 。故选：A 【点睛】本题考查对数式大小的比较，考查学生转化与回归的思想，是一道中档题。

7. B 解： $\because a > b > 0, 0 < c < 1$ ， $\therefore \log_c a < \log_c b$ ，故 B 正确； $\therefore$ 当 $a > b > 1$ 时， $0 > \log_a c > \log_b c$ ，故 A 错误； $a^c > b^c$ ，故 C 错误； $c^a < c^b$ ，故 D 错误；故选：B.

8. B 【详解】 $a = \log_2 0.2 < \log_2 1 = 0$ ， $b = 2^{0.2} > 2^0 = 1$ ， $0 < 0.2^{0.3} < 0.2^0 = 1$ ，则 $0 < c < 1, a < c < b$ 。故选 B.

9. B 解析： $f(x) = \frac{1-x}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x}$ $f(x)$ 向右平移一个单位，向上平移一个单位得到 $g(x) = \frac{2}{x}$ 为奇函数。所以选 B.

10. B 【详解】由题意得， $F(1, 0)$ ，则 $|AF| = |BF| = 2$ ，即点 A 到准线 $x = -1$ 的距离为 2，所以点 A 的横坐标为 $-1 + 2 = 1$ ，不妨设点 A 在 x 轴上方，代入得， $A(1, 2)$ ，所以 $|AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}$ 。故选：B

11. D 解: $\because$ 渐近线的方程是 $y = \pm \frac{b}{a}x$, $\therefore 2 = \frac{b}{a} \bullet 4$, $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, $a = 2b$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 即它的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$. 故选: D.

12. A 【详解】由 $e_2 = \sqrt{3}e_1$, 得 $e_2^2 = 3e_1^2$, 因此 $\frac{4-1}{4} = 3 \times \frac{a^2-1}{a^2}$, 而 $a > 1$, 所以 $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 故选: A

13. C 【详解】设抛物线的焦点为 F , 由抛物线的定义知 $|AF| = x_A + \frac{p}{2} = 12$, 即 $12 = 9 + \frac{p}{2}$, 解得 $p = 6$. 故选: C.
【点睛】本题主要考查利用抛物线的定义计算焦半径, 考查学生转化与化归思想, 是一道容易题.

14. D 【详解】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $a_1 + a_2 + a_3 = a_1(1 + q + q^2) = 1$, $a_2 + a_3 + a_4 = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = a_1q(1 + q + q^2) = q = 2$ 因此, $a_6 + a_7 + a_8 = a_1q^5 + a_1q^6 + a_1q^7 = a_1q^5(1 + q + q^2) = q^5 = 32$. 故选: D.

15. B 【详解】由 $S_{10} - S_5 = a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 5a_8 = 0$, 则 $a_8 = 0$, 则等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d = \frac{a_8 - a_5}{3} = -\frac{1}{3}$, 故 $a_1 = a_5 - 4d = 1 - 4 \times (-\frac{1}{3}) = \frac{7}{3}$. 故选: B.

16. C 解: $\because S_n$ 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_4 + a_5 = 24, S_6 = 48$, $\therefore \begin{cases} a_1 + 3d + a_1 + 4d = 24 \\ 6a_1 + \frac{6 \times 5}{2}d = 48 \end{cases}$, 解得 $a_1 = -2, d = 4$, $\therefore \{a_n\}$ 的公差为 4. 故选: C.

17. B 【详解】求解二次不等式 $x^2 - 4 \leq 0$ 可得: $A = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, 求解一次不等式 $2x + a \leq 0$ 可得: $B = \{x | x \leq -\frac{a}{2}\}$. 由于 $A \cap B = \{x | -2 \leq x \leq 1\}$, 故: $-\frac{a}{2} = 1$, 解得: $a = -2$. 故选: B.

18. D 解: 法 1 $^\circ$ $\because \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{3}{5}$, $\therefore \sin 2\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = \cos 2(\frac{\pi}{4} - \alpha) = 2\cos^2(\frac{\pi}{4} - \alpha) - 1 = 2 \times \frac{9}{25} - 1 = -\frac{7}{25}$ 法 2 $^\circ$ $\because \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha) = \frac{3}{5}$, $\therefore \frac{1}{2}(1 + \sin 2\alpha) = \frac{9}{25}$, $\therefore \sin 2\alpha = 2 \times \frac{9}{25} - 1 = -\frac{7}{25}$, 故选: D.

19. B 解: 函数 $f(x) = 2\cos^2 x - \sin^2 x + 2 = 2\cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin^2 x + 2\cos^2 x = 4\cos^2 x + \sin^2 x = 3\cos^2 x + 1$, $= 3 \cdot \frac{\cos 2x + 1}{2} + 1 = \frac{3\cos 2x}{2} + \frac{5}{2}$ 故函数的最小正周期为 π , 函数的最大值为 $\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$, 故选: B.

20. D 【详解】 $\because f(x)$ 是奇函数, $f'(x_0) = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0}$. 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, $f(-x) = e^{-x} - 1 = -f(x)$, 得 $f(x) = -e^{-x} + 1$. 故选 D.

21. B 【详解】设其中做过测试的 3 只兔子为 a, b, c , 剩余的 2 只为 A, B , 则从这 5 只中任取 3 只的所有取法有 $\{a, b, c\}, \{a, b, A\}, \{a, b, B\}, \{a, c, A\}, \{a, c, B\}, \{a, A, B\}, \{b, c, A\}, \{b, c, B\}, \{b, A, B\}, \{c, A, B\}$ 共 10 种. 其中恰有 2 只做过测试的取法有 $\{a, b, A\}, \{a, b, B\}, \{a, c, A\}, \{a, c, B\}, \{b, c, A\}, \{b, c, B\}$ 共 6 种, 所以恰有 2 只做过测试的概率为 $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, 选 B.

22. B 解: $\because A = \{-2, 0, 2\}, B = \{x | x^2 - x - 2 = 0\} = \{-1, 2\}$, $\therefore A \cap B = \{2\}$. 故选: B.

23. A 【详解】 $\bar{z} = 1 + 2i, z + a\bar{z} + b = 1 - 2i + a(1 + 2i) + b = (1 + a + b) + (2a - 2)i$ 由 $z + a\bar{z} + b = 0$, 得 $\begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 2a - 2 = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$ 故选: A

24. B 【详解】由已知, 不妨设 $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$, 则 $a = 1, c = 2$, 因为 $|OP| = 1 = \frac{1}{2}|F_1F_2|$, 所以点 P 在以 F_1F_2 为直径的圆上, 即 $\square F_1F_2P$ 是以 P 为直角顶点的直角三角形, 故 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2$, 即 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 16$, 又 $|PF_1| - |PF_2| = 2a = 2$, 所以 $4 = ||PF_1| - |PF_2||^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1||PF_2| = 16 - 2|PF_1||PF_2|$, 解得 $|PF_1||PF_2| = 6$, 所以 $S_{\triangle F_1F_2P} = \frac{1}{2}|PF_1||PF_2| = 3$ 故选: B 【点睛】本题考查双曲线中焦点三角面积的计算问题, 涉及到双曲线的定义, 考查学生的数学运算能力, 是一道中档题.

25. B 解: 设椭圆的方程为: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 直线 l 经过椭圆的一个顶点和一个焦点 则直线方程为: $\frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1$, 椭圆中心到 l 的距离为其短轴长的 $\frac{1}{4}$, 可得: $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}}} = \frac{b}{2}$, $4 = b^2(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}) \therefore \frac{b^2}{c^2} = 3$, $\frac{a^2 - c^2}{c^2} = 3 \therefore e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ 故选: B.

26. B 【详解】由 $y = k(x + 1)$ 可知直线过定点 $P(-1, 0)$, 设 $A(0, -1)$, 当直线 $y = k(x + 1)$ 与 AP 垂直时, 点 A 到直线 $y = k(x + 1)$ 距离最大, 即为 $|AP| = \sqrt{2}$. 故选: B.

27. A 【详解】 $\because \frac{c}{a} = \sqrt{5}, \therefore c = \sqrt{5}a$, 根据双曲线的定义可得 $||PF_1| - |PF_2|| = 2a$, $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2}|PF_1| \cdot |PF_2| = 4$, 即 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 8$, $\because F_1P \perp F_2P$, $\therefore |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = (2c)^2 \therefore (|PF_1| - |PF_2|)^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 4c^2$, 即 $a^2 - 5a^2 + 4 = 0$, 解得 $a = 1$, 故选: A.

28. D 解: $|PF_2| = x, \because PF_2 \perp F_1F_2, \angle PF_1F_2 = 30^\circ, \therefore |P_1| = 2x, |F_1F_2| = \sqrt{3}x$, 又 $|PF_1| + |PF_2| = 2a, |F_1F_2| = 2c \therefore 2a = 3x, 2c = \sqrt{3}x, \therefore C$ 的离心率为: $e = \frac{2c}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选: D.

29. A 解: $\because$ 双曲线两焦点间的距离为 4, $\therefore c = 2$, 当焦点在 x 轴上时, 可得: $4 = (m^2 + n) + (3m^2 - n)$, 解得: $m^2 = 1$, $\therefore$ 方程 $\frac{x^2}{m^2+n} - \frac{y^2}{3m^2-n} = 1$ 表示双曲线, $\therefore (m^2 + n)(3m^2 - n) > 0$, 可得: $(n+1)(3-n) > 0$, 解得: $-1 < n < 3$, 即 n 的取值范围是: $(-1, 3)$. 当焦点在 y 轴上时, 可得: $-4 = (m^2 + n) + (3m^2 - n)$, 解得: $m^2 = -1$, 无解. 故选: A.

30. B 解: $\because$ 钝角三角形 ABC 的面积是 $\frac{1}{2}$, $AB = c = 1$, $BC = a = \sqrt{2}$, $\therefore S = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2}$, 即 $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 当 B 为钝角时, $\cos B = -\sqrt{1 - \sin^2 B} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 利用余弦定理得: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B = 1 + 2 + 2 = 5$, 即 $AC = \sqrt{5}$, 当 B 为锐角时, $\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 利用余弦定理得: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B = 1 + 2 - 2 = 1$, 即 $AC = 1$, 此时 $AB^2 + AC^2 = BC^2$, 即 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 不合题意, 舍去, 则 $AC = \sqrt{5}$. 故选: B.

31. D 解: $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{4}$, BC 边上的高等于 $\frac{1}{3}BC$, $\therefore AB = \frac{\sqrt{2}}{3}BC$ 由余弦定理得: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B} = \sqrt{\frac{2}{9}BC^2 + BC^2 - \frac{2}{3}BC^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}BC$, 故 $\frac{1}{2}BC \cdot \frac{1}{3}BC = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}BC \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}BC \cdot \sin A$, $\therefore \sin A = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, 故选: D.

32. C 【详解】由题意知: 曲线 C 为 $y = \sin[\omega(x + \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{3}] = \sin(\omega x + \frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{3})$, 又 C 关于 y 轴对称, 则 $\frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\omega = \frac{1}{3} + 2k, k \in \mathbf{Z}$, 又 $\omega > 0$, 故当 $k = 0$ 时, ω 的最小值为 $\frac{1}{3}$. 故选: C.

33. A 解: 函数 $f(x) = \frac{1}{5} \sin(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{5} \sin(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(-x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{5} \sin(x + \frac{\pi}{3}) + \sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{6}{5} \sin(x + \frac{\pi}{3}) \leq \frac{6}{5}$. 故选: A.

34. D 【解析】【解答】 $\because f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$ 单调递增, 又 $x = \frac{\pi}{6}$ 和 $x = \frac{2\pi}{3}$ 是 $y = f(x)$ 的对称轴, $\therefore f(\frac{\pi}{6}) = -1, |\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}| = \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{\omega}$, 解得 $\omega = 2$,

$$\begin{aligned} \therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = -1, \text{ 即 } \frac{\pi}{3} + \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = 2k\pi - \frac{5\pi}{6}, \\ \therefore f\left(-\frac{5\pi}{12}\right) &= \sin\left(-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \downarrow \end{aligned}$$

故选: D

35. C 【详解】设正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 15, \\ a_1q^4 = 3a_1q^2 + 4a_1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a_1 = 1, \\ q = 2 \end{cases}$, $\therefore a_3 = a_1q^2 = 4$, 故选 C.

36. A 【详解】 $\because S_n$ 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $\therefore S_2, S_4 - S_2, S_6 - S_4$ 成等比数列 $\therefore S_2 = 4, S_4 - S_2 = 6 - 4 = 2 \therefore S_6 - S_4 = 1 \therefore S_6 = 1 + S_4 = 1 + 6 = 7$ 故选: A.

37. B 解: $\because b = 2, B = \frac{\pi}{6}, C = \frac{\pi}{4}$, $\therefore$ 由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 得: $c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$, $A = \frac{7\pi}{12}$, $\therefore \sin A = \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}) = \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, 则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \sqrt{3} + 1$. 故选: B.

38. B 【详解】方法一: 设 $\angle F_1PF_2 = 2\theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 所以 $S_{\triangle PF_1F_2} = b^2 \tan \frac{\angle F_1PF_2}{2} = b^2 \tan \theta$, 由 $\cos \angle F_1PF_2 = \cos 2\theta = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{3}{5}$, 解得: $\tan \theta = \frac{1}{2}$, 由椭圆方程可知, $a^2 = 9, b^2 = 6, c^2 = a^2 - b^2 = 3$, 所以, $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \times |F_1F_2| \times |y_p| = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times |y_p| = 6 \times \frac{1}{2}$, 解得: $y_p^2 = 3$, 即 $x_p^2 = 9 \times (1 - \frac{3}{6}) = \frac{9}{2}$, 因此 $|OP| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} = \sqrt{3 + \frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$. 故选: B.

39. B 解: 椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点坐标 $(\pm 3, 0)$, 则双曲线的焦点坐标为 $(\pm 3, 0)$, 可得 $c = 3$, 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线方程为 $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$, 可得 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 即 $\frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{5}{4}$, 可得 $\frac{c}{a} = \frac{3}{2}$, 解得 $a = 2, b = \sqrt{5}$, 所求的双曲线方程为: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$. 故选: B.

40. B 【详解】由于圆上的点 $(2, 1)$ 在第一象限, 若圆心不在第一象限, 则圆与至少与一条坐标轴相交, 不合乎题意, 所以圆心必在第一象限, 设圆心的坐标为 (a, a) , 则圆的半径为 a , 圆的标准方程为 $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$. 由题意可得 $(2 - a)^2 + (1 - a)^2 = a^2$, 可得 $a^2 - 6a + 5 = 0$, 解得 $a = 1$ 或 $a = 5$, 所以圆心的坐标为 $(1, 1)$ 或 $(5, 5)$, 圆心到直线 $2x - y - 3 = 0$ 的距离均为 $d = \frac{|2 - 1 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; 所以, 圆心到直线 $2x - y - 3 = 0$ 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 故选: B.

41. A 【详解】由题知, $\begin{cases} S_4 = 4a_1 + \frac{d}{2} \times 4 \times 3 = 0 \\ a_5 = a_1 + 4d = 5 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a_1 = -3 \\ d = 2 \end{cases}$, $\therefore a_n = 2n - 5$, 故选 A.

42. D 【详解】因为 $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, 而 α 为锐角, 解得: $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{16}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$. 故选: D.

43. C 解: 设等轴双曲线 $c: x^2 - y^2 = a^2 (a > 0)$, $y^2 = 16x$ 的准线 $l: x = -4$, $\therefore C$ 与抛物线 $y^2 = 16x$ 的准线 $l: x = -4$ 交于 A, B 两点, $|AB| = 4\sqrt{3} \therefore A(-4, 2\sqrt{3}), B(-4, -2\sqrt{3})$, 将 A 点坐标代入双曲线方程得 $a^2 = (-4)^2 - (2\sqrt{3})^2 = 4$, $\therefore a = 2$, $2a = 4$. 故选: C.

44. A 解: 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, E 为 AD 的中点, $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ 故选: A.

45. B 解: $\because S_n$ 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $3S_3 = S_2 + S_4, a_1 = 2$, $\therefore 3 \times (3a_1 + \frac{3 \times 2}{2}d) = a_1 + a_1 + d + 4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}d$, 把 $a_1 = 2$, 代入得 $d = -3 \therefore a_5 = 2 + 4 \times (-3) = -10$. 故选: B.

46. B 【详解】因为 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(1) = f(-1) \therefore (1+a)\ln \frac{1}{3} = (-1+a)\ln 3$, 解得 $a = 0$, 当 $a = 0$ 时, $f(x) = x \ln \frac{2x-1}{2x+1}, (2x-1)(2x+1) > 0$, 解得 $x > \frac{1}{2}$ 或 $x < -\frac{1}{2}$, 则其定义域为 $\{x|x > \frac{1}{2} \text{ 或 } x < -\frac{1}{2}\}$, 关于原点对称.

$$f(-x) = (-x) \ln \frac{2(-x)-1}{2(-x)+1} = (-x) \ln \frac{2x+1}{2x-1} = (-x) \ln \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{-1} = x \ln \frac{2x-1}{2x+1} = f(x),$$

故此时 $f(x)$ 为偶函数. 故选: B.

47. C 解析: 对于 A, $y = x^2 + 2x + 4 = x^2 + 2x + 1 + 3 = (x+1)^2 + 3 \geq 3$. 不符合, 对于 B, $y = |\sin x| + \frac{4}{|\sin x|}$, 令 $t = |\sin x| \in [0, 1]$, $\therefore y = t + \frac{4}{t}$, 根据对勾函数 $y_{\min} = 1 + 4 = 5$ 不符合, 对于 C, $y = 2^x + 2^{2-x} = 2^x + \frac{4}{2^x}$, 令 $t = 2^x > 0$, $\therefore y = t + \frac{4}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{4}{t}} = 2 \times 2 = 4$ 当且仅当 $t = 2$ 时取等, 符合, 对于 D, $y = \ln x + \frac{4}{\ln x}$, 令 $t = \ln x \in \mathbb{R}$, $y = t + \frac{4}{t}$. 根据对勾函数 $y \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$, 不符合.

48. D 【详解】函数 $y = 2^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 而函数 $f(x) = 2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 则有函数 $y = x(x-a) = (x - \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 因此 $\frac{a}{2} \geq 1$, 解得 $a \geq 2$, 所以 a 的取值范围是 $[2, +\infty)$. 故选: D